EQUACIÓ DE DE RHAM LINEALITZADA. APLICACIÓ A UNA CAVITAT RESONANT.

J. Graells, C. Martín, J.M. Codina, X. Compte
Departament d'Electricitat i Electrònica. Facultat de Física.
Universitat de Barcelona.

I. Introducció

Partint de l'observació segons la qual la interacció gravitatòria té un paper singular segons la geometrodinàmica einsteniana, en el sentit que tota interacció és influïda per l'acció del camp gravitatori, es planteja el problema d'analitzar l'electromagnetisme maxwellià sota aquest punt de vista amb l'objecte de posar en evidència fenòmens, l'explicació dels quals resta amagada dins les equacions d'Einstein-Maxwell i/o que, potser a causa de llur feblesa, encara no han estat detectats experimentalment.

II. Linealització de l'operador vectorial d'ones de De Rham

Suposarem al llarg de tot el treball camps gravitatoris febles, i per tant els descriurem mitjançant la teoria linealitzada de la gravitació d'Einstein [1], [2], etc.

Quant al camp electromagnètic, l'estudiarem en funció de l'equació de De Rham que en un espai-temps corbat adopta l'expressió següent utilitzant el *gauge* de Lorentz:

$$(2.1) \qquad (\Delta_{dR} A)^{\mu} \equiv - A^{\mu;\alpha}{}_{\alpha} + R^{\mu}{}_{\alpha} A^{\alpha} = 4\pi J^{\mu}$$

(Utilitzem la nomenclatura i conveni de signes de [3]).

Calculant les derivades covariants i introduint en un pas intermedi l'expressió del tensor de Riemann, hom obté l'equació:

$$(\Delta_{dR} A)^{\mu} = - g^{\alpha\nu}[A^{\mu}{}_{,\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} A^{\beta}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} A^{\beta}{}_{,\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\nu\alpha} A^{\mu}{}_{,\tau}] -$$
$$- g^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} A^{\beta} + 2 R^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} = 4\pi J^{\mu}$$

que és equivalent a (2.1), bé que no explícitament covariant. Tanmateix aquesta expressió és idònia per a la seva linealització en el *gauge* de Hilbert-Lorentz.

En efecte, tenint en compte que:

a) $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$. $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$

b) $\eta^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ (Hilbert-Lorentz)

c) Menyspreant termes quadràtics en $h_{\alpha\beta}$ resulta, si simbolitzem amb el subíndex 1 els termes lineals:

(2.3) $$(\underset{1}{\Delta}_{dR} A)^{\mu} = - A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} + h^{\alpha\nu} A^{\mu}{}_{,\alpha\nu} - 2 \underset{1}{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha,\nu} + $$
$$+ 2 \underset{1}{R}^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} = 4\pi J^{\mu}$$

equació fonamental de tot el treball.

III. Mètode pertorbatiu

Fonamentarem el mètode pertorbatiu [4] en la següent descomposició del potencial vector

(3.1) $$A^{\mu} = \underset{0}{A}^{\mu} + \underset{1}{A}^{\mu}$$

on $\underset{0}{A}^{\mu}$ representa el camp electromagnètic sense el camp gravitatori, i $\underset{1}{A}^{\mu}$ és la correcció deguda a la presència del camp gravitatori. El sistema físic que considerarem és el camp electromagnètic lliure pel qual $J^{\mu} = 0$.

Substituint (3.1) a (2.3) i menyspreant termes quadràtics en les correccions, hom obté la següent equació:

(3.2) $$\underset{1}{A}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = h^{\alpha\nu} \underset{0}{A}^{\mu}{}_{,\alpha\nu} - 2 \underset{1}{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \underset{0}{A}^{\alpha,\beta} + 2 \underset{1}{R}^{\mu}{}_{\alpha} \underset{0}{A}^{\alpha}$$

Equació diferencial lineal en derivades parcials de tipus hiperbòlic, que té la coneguda solució integral

$$\underset{1}{A}^{\mu} = \int d^4x' \, D_R(x - x') \, J^{\mu}_{ef.}(x') \tag{3.3}$$

on ha estat definit el corrent efectiu com

$$J^{\mu}_{ef.} = \frac{1}{4\pi}\left[h^{\alpha\nu} \underset{0}{A}^{\mu}{}_{,\alpha\nu} - 2 \underset{1}{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \underset{0}{A}^{\alpha,\beta} + 2 \underset{1}{R}^{\mu}{}_{\alpha} \underset{0}{A}^{\alpha} \right] \tag{3.4}$$

i $D_R\,(x-x')$ és el conegut propagador retardat de l'equació d'ones.

El mètode pertorbatiu pot ésser esquematitzat de la manera següent:

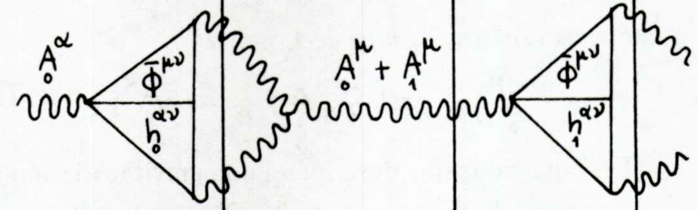
Ordre d'aproximació		**Zero**	**U**	**Dos**	**etc.**
Estructura ($\bar{\Phi}^{\mu\nu}$ camp extern lliure ⇔ condicions de contorn)					
Equacions	Electro-magne-tisme	Maxwell-Lorentz (Relativitat Restringida)	De Rham linealitzada Lorentz	Les mateixes de de l'aproximació d'ordre u	
	Gravitació	Einstein-Maxwell linealitzada Hilbert-Lorentz	Les mateixes de de l'aproximació d'ordre zero	Einstein-Maxwell linealitzada Hilbert-Lorentz	

Figura 1

Evidentment encara que es reiterés indefinidament hom no obtindria una solució de les equacions d'Einstein-Maxwell per tal com no contempla el camp gravitatori com a font d'ell mateix.

IV. Aplicació a una cavitat ressonant

Per tal de fixar les idees, considerarem una cavitat ressonant rectangular de parets superconductores i situarem el sistema de coordenades d'acord amb la figura 2. Com a camp gravitatori escollim una ona gravitatòria plana, monocromàtica, de polarització $\hat{e}_+$ que incideix perpendicularment sobre la cavitat. El potencial vector del camp electromagnètic abans d'interactuar amb l'ona gravitatòria és:

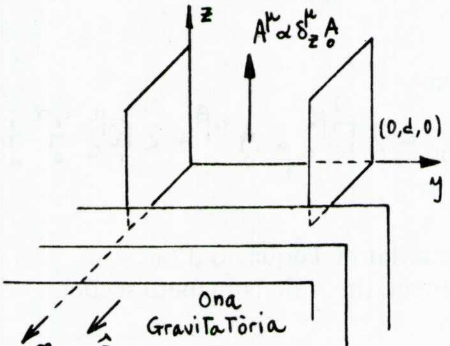


Figura 2

$$\underset{0}{A}^{\mu} = \delta^{\mu}_{z} \sum_{n} \left\{ M_m \cos \frac{n\pi}{d} t + N_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{d} t \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{d} y \tag{4.1}$$

És clar que es verifiquen les condicions de contorn

$$\underset{0}{A}^{\mu}(t, 0) = \underset{0}{A}^{\mu}(t, d) = 0$$

i també es verifica el *gauge* de Lorentz

$$\underset{0}{A}^{\mu}{}_{,\mu} = (\delta^{\mu}_{z} \underset{0}{A})_{,\mu} = \underset{0}{A}^{z}{}_{,z} = 0$$

Les equacions que descriuen l'ona gravitatòria són les següents:

$$h^{\mu\nu} = C_+ \left\{ \delta^{\mu}_{y} \delta^{\nu}_{y} - \delta^{\mu}_{z} \delta^{\nu}_{z} \right\} e^{-i K^{\sigma} x_{\sigma}} \tag{4.2}$$

on K^{σ} és el vector propagació de components $K^{\sigma} = W(\delta^{\sigma}_{0} + \delta^{\sigma}_{x})$

Substituint-lo a (4.2), i agafant la part real, obtenim

$$h^{\mu\nu} = C_+ \left\{ \delta^{\mu}_{y} \delta^{\nu}_{y} - \delta^{\mu}_{z} \delta^{\nu}_{z} \right\} \cos W(t - x) \tag{4.3}$$

Trivialment es compleix el *gauge* de Hilbert-Lorentz, per tal com utilitzem el *transverse traceless gauge*.

Menyspreant el camp $\underset{0}{A}^{\mu}$ com a font de camp gravitatori, i per tant anul·lant el tensor de Ricci a (3.2), aquesta es redueix a

$$\underset{1}{A}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = h^{\alpha\nu} \underset{0}{A}^{\mu}{}_{,\alpha\nu} - 2 \underset{1}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \underset{0}{A}^{\alpha,\beta} \tag{4.4}$$

Per a solucionar aquesta equació hem de calcular-ne el segon membre, és a dir $J^{\mu}_{ef.}$. Per tant, determinem les contraccions següents:

$$h^{\alpha\nu} \underset{0}{A}{}^{\mu}{}_{,\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{z}\, C_{+}\, \eta_{,y} \cos W(t-x)$$

$$-2 \underset{1}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \underset{0}{A}{}^{\alpha,\beta} = -\delta^{\mu}_{z}\, C_{+}\, \chi \operatorname{sen} W(t-x)$$

on χ i η són les funcions:

$$\chi = \sum_{n} \frac{n\pi}{d} \left\{ -M_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{d} t + N_m \cos \frac{n\pi}{d} t \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{d} y$$

$$\eta = \sum_{n} \frac{n\pi}{d} \left\{ M_m \cos \frac{n\pi}{d} t + N_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{d} t \right\} \cos \frac{n\pi}{d} y$$

Substituint aquestes expressions a (4.4), obtenim

$$\text{(4.5)} \quad \underset{1}{A}{}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = \delta^{\mu}_{z} C_{+} \Big\{ \cos W(t-x) \sum_{n} \omega_m^2 (M_m \cos \omega_m t + N_m \operatorname{sen} \omega_m t) \cdot$$
$$\cdot \operatorname{sen} \omega_m y - W \operatorname{sen} W(t-x) \sum_{m} \omega_m (-M_m \operatorname{sen} \omega_m t +$$
$$+ N_m \cos \omega_m t) \operatorname{sen} \omega_n y \Big\}$$

Per tal de simplificar aquesta equació, definirem, com és pràctica corrent en electrònica, l'angle φ_n com:

$$\operatorname{sen} \varphi_m = \frac{M_m}{\sqrt{M_m^2 + N_m^2}} \quad ; \quad \cos \varphi_m = \frac{N_m}{\sqrt{M_m^2 + N_m^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{M_m}{N_m}$$

Efectuant càlculs senzills, però llargs, arribem a la següent expressió equivalent:

$$\text{(4.6)} \quad \underset{1}{A}{}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = \delta^{\mu}_{z} \frac{1}{4} C_{+} \sum_{n} \sqrt{M_m^2 + N_m^2}\, \omega_m^2 \Big\{ \Big(1 - \frac{W}{\omega_m}\Big) \Big(\cos[\underset{+}{\chi}{}^{\sigma}_{n} x_\sigma - \varphi_m] -$$
$$- \cos[\underset{+}{\tilde{\chi}}{}^{\sigma}_{n} x_\sigma - \varphi_m] + \Big(1 - \frac{W}{\omega_m}\Big) \Big(\cos[\underset{-}{\chi}{}^{\sigma}_{n} x_\sigma - \varphi_m] - \cos[\underset{-}{\tilde{\chi}}{}^{\sigma}_{n} x_\sigma - \varphi_n] \Big) \Big\}$$

on han estat definits els quadrivectors:

$$\underset{+}{K}_n \equiv (\omega_m + W,\ W,\ \omega_m,\ 0)$$
$$\underset{+}{\tilde{K}}_n \equiv (\omega_m + W,\ W,\ -\omega_m,\ 0)$$
$$\underset{-}{K}_n \equiv (\omega_m - W,\ -W,\ \omega_m,\ 0)$$
$$\underset{-}{\tilde{K}}_n \equiv (\omega_m - W,\ -W,\ -\omega_m,\ 0)$$

El mòdul d'aquests vectors és:

$$\underset{+}{K}^{\mu}_n \underset{+}{K}_{n\mu} = -2\,\omega_m W < 0$$
$$\underset{+}{\tilde{K}}^{\mu}_n \underset{+}{\tilde{K}}_{n\mu} = -2\,\omega_m W < 0$$
$$\underset{-}{K}^{\mu}_n \underset{-}{\tilde{K}}_{n\mu} = +2\,\omega_m W > 0$$
$$\underset{-}{\tilde{K}}^{\mu}_n \underset{-}{\tilde{K}}_{n\mu} = +2\,\omega_m W > 0$$

Per tal de no violar el principi de causalitat, i com que podem interpretar els quadrivectors **K** com a vectors propagació de la pertorbació del camp electromagnètic produïda per l'ona gravitatòria, menysprearem en (4.6) la part corresponent a $\underset{-}{\mathbf{K}}$, puix que són vectors del gènere espai.

Per tant, efectuant la integració (3.3) obtenim com a solució

$$(4.7)\quad \underset{1}{A}^{\mu} = \delta^{\mu}_{z}\,\frac{1}{8}\,C_{+}\sum_{n}\sqrt{M_m^2+N_m^2}\left\{\left(\frac{\omega_n}{W}-1\right)\cdot\left(\cos\left[\underset{+}{K}^{\sigma}_n x_{\sigma}-\varphi_m\right]-\cos\left[\underset{+}{\tilde{K}}^{\sigma}_n x_{\sigma}-\varphi_n\right]\right)\right\}$$

que també pot ésser escrita

$$(4.7)'\quad \underset{1}{A}^{\mu} = \delta^{\mu}_{z}\,\frac{1}{8}\,C_{+}\sum_{n}\sqrt{M_n^2+N_n^2}\left\{\left(\frac{\omega_n}{W}-1\right)\cdot\left(\cos\left[-(\omega_n+W)t+Wx+\omega_n y-\varphi_m\right]-\cos\left[-(\omega_n+W)t+Wx-\omega_n y-\varphi_n\right]\right)\right\}$$

Per tant, l'efecte de l'ona gravitatòria, en interactuar amb el camp electromagnètic, consisteix a induir dins la cavitat un camp electromagnètic de freqüència $\omega_n + W$ que verifica les mateixes condicions de contorn que el camp electromagnètic sense pertorbar, és a dir

$$\underset{1}{A}^{\mu}(t, x, y=0) = 0$$

$$\underset{1}{A}^{\mu}(t, x, y=d) = 0$$

Deduïm doncs que les freqüències pròpies de la cavitat no experimenten cap alteració. Aquest resultat justifica la utilització de les cavitats ressonants com amplificadors paramètrics en els detectors cilíndrics de Weber d'ones gravitatòries, com ja prèviament ha apuntat Braguinski [5], [6].

V. Conclusió

Les idees esquematitzades en aquest article són susceptibles d'aplicar-se a tot l'electromagnetisme maxwellià i, per tant, fan possible la deducció dels fenòmens que hi indueixen camps gravitatoris febles [7].

En particular l'aplicació del formulisme a guies d'ona ens ha conduït al disseny d'una antena d'ones gravitatòries fonamentada en fenòmens totalment electromagnètics, realitzable pràcticament amb els equips actuals, i que no té res a veure amb l'antena d'ones proposada per Braguinski-Manoukine [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] Ohanian, H.C. (1976)
Gravitation and Space-time
Norton

[2] Gupta, S.N. (1954)
Phys. Rev., 96, 1683

[3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973)
Gravitation
Freeman and Company

[4] B. Bertotti (1971)
Detection of Gravitational waves, in R.K. Sachs (ed.)
Relatività Generale e Cosmologia. XLVII Corso
"Enrico Fermi"
Academic Press

[5] N.R. Lebovitz, W.H. Reid, P.O. Vandervoot (1978)
Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity
The University of Chicago Press

[6] Abstracts of Contributed Papers
8th. International Conference on General Relativity and Gravitation
August 7-12, 1977
University of Waterloo. Canadà

[7] J. Graells (1978)
Correcciones Gravitatorias Lineales al Electromagnetismo Clásico
Tesis Doctoral. Universidad Barcelona

[8] V. Braguinski, A. Manoukine (1974)
Mesure de Petites Forces dans les Expériences Physiques
Editions Mir - Moscou

Barcelona, març de 1979